ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG KHÁNH TRÌNH

BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC JACK GARFUNKEL

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG KHÁNH TRÌNH

BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC JACK GARFUNKEL

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. TRỊNH THANH HẢI

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Danh mục các ký hiệu

ΔABC	Tam giác ABC
S_{ABC}	Diện tích tam giác ΔABC
a, b, c	Độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C của ΔABC
h_a, h_b, h_c	Độ dài các đường cao xuất phát từ các đỉnh A, B, C của ΔABC
m_a, m_b, m_c	Độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C của ΔABC
l_a, l_b, l_c	Độ dài các đường phân giác xuất phát từ các đỉnh A, B, C của ΔABC
R, r	Bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác
p	Nửa chu vi của tam giác $p = \dfrac{a+b+c}{2}$
$\sum\limits_{i=1}^{m} a_i$	Ký hiệu tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$
$\prod\limits_{i=1}^{m} b_i$	Ký hiệu tích $b_1 b_2 \cdots b_m$

Mở đầu

1 Lý do chọn đề tài

Trong chương trình toán Trung học phổ thông, nội dung bất đẳng thức nói chung, bất đẳng thức liên quan đến các yếu tố hình học nói riêng luôn luôn thu hút được sự quan tâm của cả giáo viên và học sinh bởi sự đa dạng, phong phú và ứng dụng của nó trong thực tiễn. Đã có một vài luận văn thạc sĩ, chẳng hạn như: Trần Quang Hùng (Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội), Đặng Văn Hiếu, Nguyễn Thị Huyền Trang (Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên),... đã được thực hiện liên quan đến chủ đề bất đẳng thức, tuy nhiên cũng còn rất nhiều mảng liên quan đến bất đẳng thức, đặc biệt là các bất đẳng thức liên quan đến hình học chưa được khai thác một cách đầy đủ.

Từ khi ra đời, máy tính điện tử ngay lập tức đã trở thành một công cụ rất mạnh hỗ trợ cho việc ứng dụng và nghiên cứu toán học. Nhiều mô hình rất trừu tượng đã được mô phỏng một cách trực quan nhờ đồ họa trên máy tính hoặc ngược lại, từ những mô hình trên máy tính đã dẫn đến những dự đoán, giả thuyết để từ đó dẫn đến những tính chất, bài toán thú vị. Bất đẳng thức hình học Jack Garfunkel là một trong những tình huống như vậy. Từ việc đo đạc các yếu tố của nhiều tam giác, nhà toán học Mỹ Jack Garfunkel đã đưa ra dự đoán về một bất đẳng thức liên quan đến độ dài đường cao, đường trung tuyến và đường phân giác trong một tam giác (1960) và phải nhiều năm sau (1975) với chứng minh của nhà toán học Mỹ C.S. Gardner, người ta mới thấy rõ dự đoán của Garfunkel là chính xác. Với mong muốn mô tả lại quá trình phát hiện, chứng minh bất đẳng thức hình học Garfunkel, tác giả đã chọn đề tài: "Bất đẳng thức hình học Jack Garfunkel" là đề tài cho luận văn thạc sĩ của mình.

2 Mục đích nghiên cứu

Tìm hiểu và trình bày một cách hệ thống lịch sử và các cách chứng minh bất đẳng thức hình học Jack Garfunkel đồng thời giới thiệu một vài ứng dụng của bất đẳng thức hình học Jack Garfunkel để có một tài liệu chuyên đề dành cho việc bồi dưỡng học sinh giỏi toán.

3 Nhiệm vụ nghiên cứu

(i). Tìm hiểu sơ lược về các bất đẳng thức hình học nói chung, bất đẳng thức liên quan đến độ dài các cạnh, các đường trong một tam giác để có điểm tựa cho việc tìm hiểu lời chứng minh bất đẳng thức hình học Jack Garfunkel.

(ii). Mô phỏng lại lịch sử đưa ra dự đoán bất đẳng thức của nhà toán học Jack Garfunkel bằng việc sử dụng phần mềm hình học động trên máy tính.

(iii). Trình bày lại việc chứng minh bất đẳng thức hình học Jack Garfunkel đồng thời giới thiệu một vài ứng dụng của bất đẳng thức này.

4 Nội dung luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, luận văn được trình bày ngắn gọn trong hai chương

- Chương 1: Trình bày sơ lược một vài bất đẳng thức cơ bản thường được sử dụng khi giải các bài toán bất đẳng thức hình học và giới thiệu một vài bất đẳng thức liên quan đến độ dài các cạnh, các đường trong tam giác.

- Chương 2: Sau khi trình bày lịch sử của bất đẳng thức Jack Garfunkel, nội dung chương 2 tập trung vào việc trình bày việc chứng minh bất đẳng thức hình học Jack Garfunkel và giới thiệu một vài bất đẳng thức hình học liên quan.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành với sự hướng dẫn của Phó Giáo sư, Tiến sĩ Trịnh Thanh Hải. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới thầy, vì những chỉ bảo, hướng dẫn và giúp đỡ tận tình, chu đáo của thầy trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả muốn gửi những lời cảm ơn tốt đẹp tới tập thể lớp Cao học Toán khóa 9B(2015-2017) đã động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp ở Trường THPT Lê Ích Mộc, huyện Thủy Nguyên, thành phố Hải Phòng đã tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập và công tác của mình.

Cuối cùng, tác giả muốn dành những lời cảm ơn đặc biệt nhất đến các thành viên trong gia đình đã luôn động viên và chia sẻ với tác giả trong suốt quá trình học tập và cả khi thực hiện luận văn này.

Hải Phòng, ngày 19 tháng 5 năm 2017

Học viên

Hoàng Khánh Trình

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Với mục tiêu tìm hiểu một số bất đẳng thức liên quan đến các cạnh và độ dài các đường trong một tam giác nên trong mục này, luận văn đưa ra một số bất đẳng thức cơ bản sẽ được dùng trong các chứng minh về sau.

1.1 Một số bất đẳng thức cơ bản

Định lí 1.1.1. *(Bất đẳng thức AM - GM) Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số không âm. Khi đó*

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Hệ quả 1.1.1. *Với a, b, c là các số không âm ta có*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Hệ quả 1.1.2. *Với $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ là các số dương ta có*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}$$

hay

$$(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$.

Ví dụ 1.1.1. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng* *a)* $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}\geq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

b) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc$.

Chứng minh.

a) Áp dụng bất đẳng thức AM - GM với x, $y>0$ ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq \frac{4}{x+y}.$$

Khi đó

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\geq \frac{4}{(a+b-c)+(b+c-a)}=\frac{2}{b}.$$

Tương tự

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{c+a-b}&\geq \frac{2}{a},\\ \frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}&\geq \frac{2}{c}.\end{aligned}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức ta có điều cần chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a+b-c= & b+c-a\\ a+b-c= & c+a-b\\ b+c-a= & b+c-a\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.$$

b) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM với mọi a, $b>0$ ta có $(a+b)^2\geq 4ab$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\left[(a+b-c)+(b+c-a)\right]^2&\geq 4(a+b-c)(b+c-a)\\ \Leftrightarrow 4b^2&\geq 4(a+b-c)(b+c-a)\\ \Leftrightarrow b^2&\geq (a+b-c)(b+c-a)\end{aligned}$$

Một cách tương tự, ta cũng chứng minh được

$$a^2\geq (a+b-c)(c+a-b)$$

$$c^2\geq (b+c-a)(c+a-b).$$